МЕТОДИКА ТА ПОШУК

ПРОГАЛИНИ В ЗНАННЯХ УЧНІВ З МАТЕМАТИКИ ТА ЇХ ЗАПОБІГАННЯ

О. П. Климець, смт Дашава, Стрийський р-н, Львівська обл.

Люди помиляються саме тому, що їм бракує логіки.

Г. В. Лейбніц

Методика математики розвивається як окрема галузь наукових знань під впливом двох основних факторів. Одним із них є практична діяльність учителів, їх узагальнений досвід, у процесі яких формується методичне мислення, народжуються нові методичні прийоми, ідеї і їх системи; створюються різні засоби навчання, з'являються гіпотези, відкриття, що сприяють інтенсивності його результативності. Другий фактор — цілеспрямлені педагогічні експериментальні дослідження, для яких властиві: обґрунтована постановка методичних проблем, опора на достовірні факти й точні висновки, науковий аналіз об'єктивних навчально-виховних умов і закономірностей навчання, формування методичної думки вчителя, виховання і розвиток учнів, установлення оптимальних режимів навчання і учіння, їх результативності, а також контролю і корекції [1, с. 3].

Успіх роботи вчителя математики значною мірою залежить від того, наскільки він своєчасно виявлятиме й оперативно усуватиме недоліки в знаннях учнів. Однією з основних форм подолання прогалин у знаннях і вміннях учнів є робота над помилками. Вона буде успішною тільки тоді, коли вчитель питання якості навчання постійно триматиме в центрі своєї уваги. Що ж до аналізу помилок, то ми далекі від теорії, яка панувала в XIX ст., коли вважали, що увага до помилок у класі шкідливо впливає на засвоєння навчального матеріалу. Вважалося, що навіть у процесі аналізу результатів контрольної роботи учням слід показувати тільки виправлене розв'язання і ні в якому разі не наводити помилкового. Така теорія ґрунтувалася на концепції догматичного, механічного, а не свідомого засвоєння знань. Свідомому засвоєнню знань сприяє вдумливий аналіз учнем допущеної ним помилки, причини її виникнення і теоретичне осмислення суті. Будь-яку помилку треба використати для глибокого розгляду правила, поняття або твердження.

Аналіз помилок корисний ще й тому, що учень тією чи іншою мірою застраховує себе від повторення таких помилок у майбутньому.

Про значення своєчасного реагування на помилки відомий педагог Ян Амос Коменський писав, що будь-яка помилка з маленької сніжинки перетворюється у велику снігову бурю неуспішності, якщо на цю помилку відразу не зреагував учитель [2, с. 3].

Домогтися повної ліквідації помилок, звичайно, неможливо, але їх кількість можна звести до мінімуму, якщо проводити систематичну роботу по запобіганню і ліквідації допущених помилок. Адже кожна з них, допущена і своєчасно не усунена, породжує нові, а це у свою чергу змушує учня надалі охоплювати новий навчальний матеріал лише завдяки пам'яті і приводить до повного нерозуміння теоретичного матеріалу і невміння використовувати його під час розв'язування задач.

Слід сказати, що учень, який має поверхові, неглибокі знання, наприклад з алгебри, завжди допускає помилки. У курсі стереометрії учнівських помилок набагато менше, оскільки учень, набувши поверхових, несистематичних знань, не може приступити до розв'язання задач. Тому, згідно з методичними рекомендаціями, у процесі вивчення геометрії в школі паралельно з методами запобігання й усунення учнівських помилок повинна проводитись робота по запобіганню й усуненню прогалин у знаннях учнів з геометрії [3, с. 3].

У курсі математики 5–9-х класів розглядаються числа, вирази, формули, рівняння, нерівності, функції тощо. У процесі оволодіння ними учні натрапляють на різні труднощі.

Тому, плануючи той чи інший матеріал, слід передбачати в ньому місце, де учні можуть допускати помилки, та обдумати способи їх запобігання.

Наявність помилок, що допускають учні під час вивчення теоретичного матеріалу та розв'язування задач, пояснюється насамперед поверховим теоретичним обґрунтуванням навчального матеріалу, недостатньою увагою учнів до глибокого усвідомлення властивостей математичних дій, істотних ознак математичних об'єктів.

Іноді корисно запропонувати вправи, щоб учні під час аналізу використовували розгорнуте правило.

Звичайно, кожен розділ курсу математики в середній школі ґрунтується на раніше пройденому, але всі хиби вивчення планіметрії відчуваються під час ознайомлення зі стереометрією, доцільно весь час повертатися до планіметрії, вимагаючи від учнів повторення того матеріалу, який потрібний для розуміння кожного нового питання або задачі.

Розв'язання стереометричних задач найчастіше зводиться до розв'язання деякої планіметричної задачі. і, отже, виникають труднощі з двох причин: через невміння виконати таке завдання і через труднощі, що постають у процесі розв'язування цієї планіметричної задачі.

§ 1. Поняття про число і дії над числами

Ми часто буваємо свідками, коли учні, подаючи приклади ірраціональних чисел, називають тільки числа $\sqrt{2}$ і π. Про ірраціональні числа такого вигляду, як $\sin\frac{\pi}{12}$, 0,121314... тощо, не мають уявлення. Число —7 називають від'ємним і не раціональним, число $\sqrt{3}$ називають ірраціональним і не дійсним; число π — це 3,14, замість того щоб сказати, що число π — це ірраціональне число, яке визначає відношення довжини кола до діаметра, а 3,14 — це наближене значення числа π.

Однією з причин цього є неповне розкриття суті розширення числових систем. Тому, вивчаючи поняття про число, доцільно розкривати наукове і практичне його значення, пов'язувати з математичними діями. Корисно запропонувати учням систему вправ, що сприяє свідомому засвоєнню властивостей математичних дій. Ось приклади таких вправ:

I. Вправи, спрямовані на необхідність розширення множини натуральних чисел

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $453+x=453$;

б) $453-x=453$;

в) $453x=0$;

г) $453:0=x$;

д) $x:453=0$;

е) $x+12=9$.

2. Які математичні дії можна виконати з числами 2 і 8?

3. Чи можна виконати віднімання: 8 – 2; 2 – 8; 0 – 8?

4. Розв'яжіть рівняння: $10-x=14$; $x+17=7$.

II. Вправи, що розкривають зміст поняття цілого числа, властивостей математичних дій у множині цілих чисел

1. Чи може сума двох чисел бути менша від доданка?

2. Чи може різниця двох чисел бути більша від зменшуваного?

3. Чи може добуток двох чисел бути меншим від множника?

4. Коли сума $a+b$ більша від a і коли вона менша від a?

5. Коли різниця $a-b$ менша від a і коли вона більша від a?

6. Коли добуток ab більший від a і коли менший від a?

7. Які дії виконуються з натуральними числами?

8. Які дії виконуються з раціональними числами?

9. Розв'яжіть рівняння

$$(x-5)(x+4)=0$$

у натуральних числах.

III. Вправи на розкриття потреби розширення множини цілих чисел

1. Розв'яжіть рівняння спочатку в множині натуральних, а потім цілих чисел:

а) $(x-7)(x-3)=0$;

б) $(x+7)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$;

в) $12x=40$.

2. Які дії виконуються над цілими числами?

3. Подайте:

а) 10 кг = ...т;

б) 0,4 год = ...хв;

в) 0, 45 г = ...кг;

г) 3 дм = ...см.

IV. Вправи, спрямовані на розкриття змісту поняття раціонального числа

1. Чи може частка бути більшою від дільника?

2. Коли частка $a:b$ більша від a і коли вона менша від a?

3. Виконайте дії: 1 т : 4; 2 м : 3.

4. Розв'яжіть рівняння в множині натуральних, цілих і раціональних чисел:

а) $(x+0{,}1)(x-4)=0$;

б) $(x+0{,}3)\left(x-\frac{2}{3}\right)=0$;

в) $\left(x+\frac{2}{3}\right)(|x|-0{,}4)=0$ [2, с. 16].

§ 2. Тотожні перетворення виразів

Питання про тотожні перетворення виразів — одне з найважливіших у шкільному курсі математики, адже без знання цього не можна розв'язати рівняння, нерівність, довести теорему, розв'язати текстову задачу тощо.

Час від часу учням доцільно давати завдання перевірити правильність розв'язання вправ на тотожні перетворення. Їх можна виконувати такими способами:

а) використання обернених операцій. Якщо, наприклад, завдання полягає в тому, щоб добуток двох двочленів подати у вигляді многочлена стандартного вигляду, то обернена операція полягає в розкладанні знайденого многочлена стандартного вигляду на множники;

б) підстановка допустимих числових значень букв у початкові й кінцеві вирази (якщо знайдені числові значення виразів будуть однакові, то вправу розв'язано правильно).

Одним із важливих шляхів запобігання учнівських помилок є аналіз помилкових розв'язань вправ. Проаналізуємо причини виникнення найтиповіших помилок, яких припускаються учні під час вивчення тотожних перетворень, і намітимо деякі можливі шляхи їх запобігання та усунення.

Наявність значної кількості помилок пояснюється формальним вивченням властивостей математичних операцій. Учні заучують ту чи іншу тотожність, не розуміючи її теоретичної суті. Такі помилки, наприклад, як:

а) $7-3\frac{2}{3}=4\frac{3}{5}$;

б) $\frac{275}{9}=3\frac{5}{9}$;

в) $15x^3-6x^2-3x=3x(5x^2-2x)$,

є наслідком насамперед поверхневого теоретичного обґрунтування навчального матеріалу, на основі якого виконують ту чи іншу операцію.

Щоб допомогти учневі виявити помилку, наприклад $\frac{275}{9}=3\frac{5}{9}$, треба запропонувати йому виконати обернену дію множення.

Досить поширеною помилкою є втрата одиниці під час винесення спільного множника за дужки, який дорівнює одному з одночленів даного многочлена або відрізняється від нього тільки знаком.

Правильна відповідь

$$15x^3-6x^2-3x=3x(5x^2-2x-1).$$

Щоб запобігти таким помилкам, треба поетапно обґрунтувати розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника; другий етап — розкладання кожного члена многочлена на два співмножники, один з яких спільний; третій етап — винесення спільного множника за дужки.

Приклад

$$\begin{aligned}&15x^3-6x^2-3x=\\&=5\cdot3x\cdot x^2-2x\cdot3x-3x\cdot1=\\&=5x^2\cdot3x-2x\cdot3x-3x\cdot1=\\&=3x(5x^2-2x-1).\end{aligned}$$

Численні помилки учнів пов'язані з алгебраїчними дробами. Причиною їх появи є також поверхове теоретичне обґрунтування матеріалу. Дуже поширеною помилкою є скорочення дробів на окремі члени чисельника і знаменника. Прикладом можуть бути такі помилки:

а) $\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2-b^2$;

б) $\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{1+1}{a-b}=\frac{2}{a-b}$.

Учні вважають, що коли чисельник і знаменник дробу зменшити на одне й те саме число (замість того щоб чисельник і знаменник зменшити в одне й те саме число разів), то величина дробу від цього не зміниться. Тому треба пояснити учням, у чому полягає суть скорочення дробів і яка основна властивість дробу, і вимагати від них докладно записувати розв'язання:

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b}=$$
$$=a^2+ab+b^2.$$

Одним зі способів запобігання помилок вигляду

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}=\frac{(a+b)}{(a+b)(a+b)}=\frac{1+1}{a+b}=\frac{2}{a+b};$$

$$\frac{2a+3b}{2a}=3b$$

є обчислення значень вихідного й кінцевого виразів. Наприклад, при $a=5$, $b=4$:

$$\frac{5+4}{25+16}\neq\frac{2}{5+4}\text{ і }\frac{2\cdot5+3\cdot4}{2\cdot5}\neq3\cdot4.$$

Учні припускаються низки помилок під час віднімання дробів з многочленними чисельниками. Так, знак «мінус», що стоїть перед дробом, відносять не до всього чисельника, а лише до першого його члена, забувши, що риска дробу замінює тут дужки. Щоб запобігти таким помилкам, треба пропонувати учням у процесі множення на додатковий множник чисельник дробу брати спочатку в дужки, а потім вже проводити дальше перетворення.

Наприклад,

1) $\frac{10x+5y}{4}-\frac{7x-2y}{3}=$

$$=\frac{3(10x+5y)-4(7x-2y)}{12}=$$
$$=\frac{30x+15y-28x+8y}{12}=$$
$$=\frac{(30x-28x)+(15y+8y)}{12}=\frac{2x+23y}{12};$$

2) $\frac{5a}{a+b}-\frac{2a-3b}{a-b}=$

$$=\frac{5a(a-b)-(2a-3b)(a+b)}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{(5a^2-5ab)-(2a^2+2ab-3ab-3b^2)}{a^2-b^2}=$$
$$=\frac{5a^2-5ab-2a^2-2ab+3ab+3b^2}{a^2-b^2}=$$
$$=\frac{3a^2-4ab+3b^2}{a^2-b^2}.$$

Трапляються випадки, коли учні під час тотожних перетворень алгебраїчних виразів відкидають спільний знаменник дробів. Наприклад:

$$\frac{x^2-2x}{x-3}-\frac{4x-9}{x-3}=x^2-2x-4x-9=$$
$$=x^2-6x-9.$$

Тут учні незаконно застосовують метод аналогії, поширюючи властивість рівняння на тотожні перетворення алгебраїчних дробів. Щоб викоренити таку помилку, треба докладно розкрити суть властивості рівняння.

Однією з причин появи помилок є поспішне використання алгоритмів. Воно полягає в тому, що учневі, який ще не зрозумів структури тієї чи іншої формули, способу її застосування в тотожних перетвореннях, учитель пропонує використовувати відповідний алгоритм.

Виконуючи перетворення, не треба поспішати з механізацією процесу знаходження результату, тобто з технічним застосуванням алгоритму виконання певної операції. Якщо використовується алгоритм, то працює переважно пам'ять учня, а не його мислення. Не слід поспішно нав'язувати учням правила виконання дій.

Так, наприклад, вивчення множення дробів може стати причиною таких помилок:

$$5\frac{3}{4}+4\frac{5}{6}=9\frac{8}{10};\ 5\frac{3}{4}\cdot4\frac{5}{6}=20\frac{15}{24}.$$

Щоб запобігти цим помилкам, треба рекомендувати учням використовувати докладні послідовні записи, не опускаючи проміжних операцій. У процесі тотожних перетворень не слід за один крок перетворення виконувати дві операції.

Помилки такого характеру, як

$$-3{,}6+6=-2{,}4 \text{ і } -8{,}4-1{,}6=+10,$$

учні допускають після вивчення множення від'ємних чисел. Тут вони плутають також вивчені раніше правила множення і додавання. Запобіганню таким помилкам допомагає ілюстрація виконання дій на координатній прямій.

Щоб учні не плутали математичних операцій множення і додавання, треба приділяти належну увагу методиці спільного вивчення таких операцій.

Порушення порядку дій пов'язане з тим, що вправи на всі дії зі сталими числами учні розв'язують найбільше в 5–6-х класах, де в першу чергу вони виконують дії множення і ділення, а потім додавання і віднімання. Це правило вони використовують і під час тотожних перетворень, виконуючи такі операції, як піднесення до степеня, добування кореня, логарифмування.

Учні повинні добре зрозуміти, що діями першого степеня є піднесення до степеня, добування квадратного кореня і логарифмування. Їх виконують у першу чергу. Дії множення і ділення є діями другого степеня, їх виконують у другу чергу. Нарешті виконують дії додавання і віднімання, тобто дії третього ступеня.

Досить часто учні порушують правило розкриття дужок. Багато учнів забуває, що в дробовому виразі, записаному за допомогою риски, остання замінює собою дужки.

МЕТОДИКА ТА ПОШУК

Щоб запобігти помилкам, потрібно робити докладний послідовний розгорнутий запис розв'язання, не опускаючи окремих проміжних операцій:

$$1-\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{2ab}{2ab}-\frac{a^2+b^2}{2ab}=$$
$$=\frac{2ab-(a^2+b^2)}{2ab}=\frac{2ab-a^2-b^2}{2ab}=$$
$$=\frac{-(a^2-2ab+b^2)}{2ab}=-\frac{(a-b)^2}{2ab}.$$

Помилки, яких учні припускаються у процесі вивчення матеріалу теми «Ірраціональні вирази», зумовлені поверховим засвоєнням поняття арифметичного кореня, поширення законів дій з числами і правилами тотожних перетворень раціональних виразів на вирази з радикалами, неправильним використанням формул скороченого множення, порушення порядку дії виконання тотожних перетворень з ірраціональними виразами.

Одним зі способів усунення помилок під час вивчення тотожних перетворень виразів із змінними, які містять корінь n-го степеня, є виконання тотожних перетворень числових виразів, що дає можливість повніше розкрити зміст поняття квадратного кореня, кореня n-ного степеня та його властивостей. Врахувавши, що в процесі перетворень використовується досить великий обсяг інформації, систему вправ добирають і впорядковують так, щоб властивості кореня n-го степеня залучались до перетворень послідовно і не завчались, а засвоювались під час багаторазового застосування.

Характерні помилки, що допускають учні в перетвореннях виразів: неправильно виносять множники з-під знака кореня і неправильно вносять множники під знак кореня. Часто учні вважають, що рiність $b\sqrt{a}=\sqrt{ab^2}$ справедлива при всіх числових значеннях b, зокрема і при від'ємних.

Щоб учень міг самостійно усунути помилки, допущені у виразах, він повинен знати, що область визначення знайденого виразу має збігатися з областю визначення заданого виразу.

Помилки виникають також унаслідок порушення порядку дій під час тотожних перетворень.

Часто спрощення виразів утруднюється лише тим, що, перш ніж скоротити дріб, його зводять до спільного знаменника.

Наприклад, див. *таблицю*.

Нераціональне розв'язання	Раціональне розв'язання
$\frac{a+\sqrt[3]{a^2x}}{x+\sqrt[3]{ax^2}}-1=\frac{a+\sqrt[3]{a^2x}-x-\sqrt[3]{ax^2}}{x+\sqrt[3]{ax^2}}=$ $=\frac{(a-x)+\left(\sqrt[3]{a^2x}-\sqrt[3]{ax^2}\right)}{x+\sqrt[3]{ax^2}}=\frac{(a-x)+\sqrt[3]{ax}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)}{x+\sqrt[3]{ax^2}}=$ $=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}\right)+\sqrt[3]{ax}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)}{x+\sqrt[3]{ax^2}}=$ $=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{ax}\right)}{x+\sqrt[3]{ax^2}}=$ $=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}\right)}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}-1$	$\frac{a+\sqrt[3]{a^2x}}{x+\sqrt[3]{ax^2}}-1=$ $=\frac{\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a}\right)}-1=$ $=\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}-1$

§ 3. Помилки, що виникають під час вивчення окремих тем програмового матеріалу зі стереометрії

Скарги на прогалини в підготовці учнів з геометрії найбільше стосуються невміння правильно уявити собі просторові фігури. Це й пряме незнання точного змісту термінів, якими учні користуються (наприклад, часто спостерігається незнання того, що називається кутом між прямою і площиною), і відсутність правильного уявлення через формальне знання відповідного означення (наприклад, знаючи, що називається взаємно перпендикулярними площинами, учні не можуть сказати, скільки площин, перпендикулярних до однієї або двох даних довільних площин, можна провести через дану довільну точку).

Істотно, що в стереометрії інший, ніж у планіметрії, підхід до задач на побудову. У стереометрії йдеться про тривимірний простір, а зображати фігуру цього простору на площинних рисунках не можна без спотворення.

I. Побудова просторових фігур

Доведення геометричних теорем часто супроводжується зображенням фігур рисунками. Рисунки застосовують і під час розв'язування задач.

Однією з причин учнівських помилок під час виконання рисунків є те, що не всі співвідношення, які можна зобразити на площині, будуть правильними у просторі. Наприклад, на площині кожна пряма, яка перетинає одну з паралельних прямих, перетинає і другу паралельну пряму. У просторі не кожна пряма, що перетинає одну з паралельних прямих, має таку властивість. Тому учні не можуть виконати, наприклад, наочний рисунок до задачі «Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Чи можуть прямі AB і CD перетинатись?» і дати позитивну відповідь на поставлене запитання. Рисунок до цієї задачі в більшості виконують наочно (*рис. 1*).

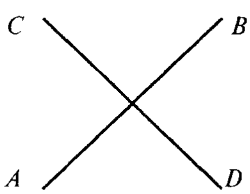

Рис. 1

Складність пов'язана з тим, що в учнів погано розвинена просторова уява, з невмінням зобразити чотири точки в просторі.

Отже, доброю порадою учням для розв'язування стереометричних задач, зміст яких пов'язаний із взаємним розміщенням чотирьох точок або двох прямих у просторі, є креслення тетраедра. З метою глибокого усвідомлення змісту задач такого типу треба розв'язати певну кількість задач, пов'язаних із взаємним розміщенням чотирьох точок.

Зрозуміти зміст кожної з цих задач допомагає рисунок тетраедра (*рис. 2*).

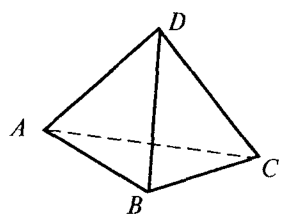

Рис. 2

З метою попередження помилок треба неодноразово підкреслювати, що стереометрія не протиставляється планіметрії. У стереометрії використовують аксіоми, введені під час вивчення планіметрії: властивості фігур, ознаки рівності трикутників, ознаки подібності трикутників, теорему Піфагора, теорему Фалеса, формулу довжини кола та ін.

Розв'язуючи задачі, досить часто учні свої міркування ілюструють просторовими рисунками. І якщо виконаний рисунок є помилковим, він стає причиною помилкового розв'язування задачі. Запобігти цьому може чітке дотримання вимог: рисунок має бути наочним і правильним.

Щоб не допустити помилок у виконанні зображення просторової фігури на площині, треба пам'ятати що:

1) прямолінійні відрізки фігури зображаються на площині рисунка прямолінійними відрізками;
2) паралельні відрізки фігури зображаються на площині рисунка паралельними відрізками;
3) відношення відрізків однієї прямої або паралельних прямих зберігається під час паралельного проектування [3, с. 35].

Дуже важливим є те, щоб учні не заучували властивостей зображення просторових фігур на площині, а інтуїтивно, самостійно їх встановлювали.

Наведу кілька прикладів.

1. Правильний трикутник *ABC* на просторовому рисунку зображається довільним трикутником *ABC*. Причому висота *AD* проектується на медіану *AD*. Таким чином, точка *D* повинна ділити сторону *BC* навпіл. Але далеко не завжди учні дотримуються цього правила.
2. Центр правильного трикутника на рисунку міститься в точці перетину медіан. Між тим, зображаючи правильну трикутну піраміду, учні часто проводять її висоту в довільну точку основи, не думаючи про те, щоб висота піраміди пройшла через точку перетину медіан основи.
3. Основу правильної чотирикутної призми зображують у вигляді трапеції, а не паралелограма.

II. Прямі і площини у просторі

Для стереометрії важливим є поняття «площина», а також перші теореми, пов'язані з цим поняттям. Одним із засобів запобігання прогалин у знаннях учнів зі стереометрії є унаочнення уроків. Здебільшого найкращим посібником є реальні предмети з навколишнього оточення.

Запобіганню учнівських помилок сприяє порівняння і співставлення взаємного розміщення двох прямих на площині та в тривимірному просторі і співставлення взаємного розміщення двох прямих з прямою і площиною за таблицею.

Треба дослідити факт перпендикулярності прямої до двох прямих, проведених на площині. Учні інтуїтивно повинні висловити гіпотезу про те, що пряма *a* перпендикулярна до двох інших прямих площини (*рис. 3*), не завжди перпендикулярна до площини α.

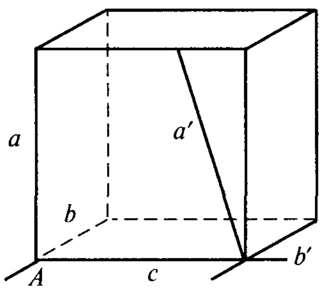

Рис. 3

Якщо пряма *a* перпендикулярна до двох прямих *b* і *c*, що перетинаються, то вона буде перпендикулярною і до площини α, в якій лежать прямі, що перетинаються. А якщо пряма *a′* перпендикулярна до двох прямих *b* і *b′*, що паралельні, то вона не буде перпендикулярною до площини α.

Після того як будуть з'ясовані ці ситуації, можна сформулювати ознаку перпендикулярності прямої до площини.

Такий підхід створює можливість запобігти помилкам: «Якщо пряма перетинає площину перпендикулярно до двох прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна до площини».

Висновок

Наведені вище міркування щодо роботи в 5–11 класах можуть варіюватись, конкретизуватись, переусвідомлюватись учителем з метою вироблення вихідної мети і навчальних завдань, поєднання найкращих методів і засобів, а також уважного аналізу програми й нового посібника з математики, геометрії, алгебри і початків аналізу.

У подальшій роботі вчителя посилену допомогу можуть надати опубліковані узагальнені матеріали з досвіду роботи вчителів шкіл. Але в готовому вигляді переносити для роботи у своєму класі досвід інших учителів недоцільно, а слід творчо його використовувати з урахуванням конкретних умов роботи кожного вчителя. Аналіз навчального матеріалу породжує низку запитань: чого навчились, як навчились, для чого навчились? Останнє запитання для учнів має і соціальну сутність: з яким багажем математичних знань вони продовжуватимуть подальше навчання в інших навчальних закладах.

Література

1. Тесленко І. Ф. Вивчення геометрії у загальноосвітній школі. — К.: Вища школа, 1984.
2. Возняк Г. М. Запобігання математичним помилкам учнів. Методичні рекомендації. — К., 1989.
3. Возняк Г. М. Прогалини в знаннях учнів зі стереометрії та їх запобігання. — К.: Освіта, 1993.
4. Лобанова Л. В., Фількінштейн Л. П. Вибрані задачі елементарної математики. — К.: Вища школа, 1989.